INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES

JUIN 1993

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures

Il est demandé au candidat de souligner dans chacune de ses réponses le ou les points clés.

La clarté, la concision et la présentation seront des éléments importants d'appréciation.

Les 5 parties sont, pour une large part, indépendantes.

Soient E, F et G des R-espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E,F)$ le R-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et $L(E,F)$ le R-espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Pour $f \in L(E,F)$, on note $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Si u et v sont des applications d'un même ensemble dans R, on écrit $u \leq v$ pour exprimer que pour tout élément x de cet ensemble on a $u(x) \leq v(x)$.

I. Norme d'opérateurs en dimension finie

On suppose que E est de dimension finie, muni d'une norme euclidienne, et on note $\mathcal{L}$, l'ensemble $\mathcal{L}(E,E)$ des endomorphismes de E. On note I l'application identité de E. Si f est un élément de $\mathcal{L}$, on note f^* l'endomorphisme adjoint de f. On note $\mathcal{O}$, le groupe orthogonal de E. Pour tout élément f de $\mathcal{L}$ on note E_f l'ensemble des vecteurs x de E vérifiant $\|f(x)\| = \|f\|\|x\|$.

1) Montrer que l'application $f \to f^*f$ de $\mathcal{L}$ dans lui même est continue. Montrer que $\mathcal{O}$ est compact et que les applications $(A, B) \to AB$ de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ et $A \to A^{-1}$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ sont continues.

2) Soit f un élément de $\mathcal{L}$. Montrer que f^*f est diagonalisable dans une base orthonormale de E, que ses valeurs propres sont des nombres réels positifs et que $\|f\|^2$ est la plus grande valeur propre de f^*f.

3) Soit f un élément de $\mathcal{L}$. Prouver que E_f est un sous espace vectoriel de E, non réduit à $\{0\}$.

4) Quels sont les éléments f dans $\mathcal{L}$ pour lesquels $E_f = E$?

5) Soient f dans $\mathcal{L}$ et A dans $\mathcal{O}$. Prouver qu'on a

$$\|f\| = \|fA\| = \|Af\|.$$

Pour tout élément A de $\mathcal{O}$, on pose $m(A) = \|A - I\|$ et on note M_A l'espace vectoriel E_{A-I}, $M_A^\perp$ son orthogonal dans E.

6) Soit A un élément de $\mathcal{O}$, prouver que M_A et $M_A^\perp$ sont stables par A.

7) Soient A et B dans $\mathcal{O}$, prouver qu'on a

$$m(ABA^{-1}B^{-1}) = \|AB - BA\|$$

et en déduire l'inégalité

$$m(ABA^{-1}B^{-1}) \leq 2m(A)m(B).$$

Soit A dans $\mathcal{O}$; si $M_A^\perp$ est réduit à $\{0\}$ on pose $m^\perp(A) = 0$, sinon, on pose

$$m^\perp(A) = sup\{\frac{\|Ax - x\|}{\|x\|} : x \in M_A^\perp, x \neq 0\}.$$

8) Soit A dans $\mathcal{O}$; prouver qu'on a $0 \leq m(A) - m^\perp(A) \leq 2$. Quels sont les éléments A de $\mathcal{O}$ tels que $m(A) = m^\perp(A)$?

9) Quels sont ceux vérifiant $m(A) = m^\perp(A) + 2$?

II. Opérateurs inversibles

E est à présent un espace vectoriel normé complet de dimension quelconque (finie ou infinie), L désigne l'ensemble $L(E, E)$ des endomorphismes continus de E, I désigne l'application identité de E et l'on note GL l'ensemble des éléments inversibles de L à inverse dans L. Pour $A \in L$ on note $\sigma(A)$ l'ensemble des réels λ tels que $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

1) Montrer que si $A \in L$ et $\|A\| < 1$ alors $I + A \in GL$.

2) Montrer que l'application $A \to A^{-1}$ de GL dans GL est un homéomorphisme.

3) Montrer que pour tout $A \in L$, $\sigma(A)$ est compact et que pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, $|\lambda| \leq \|A\|$.

4) Montrer que pour $A \in L$ et $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda^n \in \sigma(A^n)$. En déduire que pour tout $\lambda \in \sigma(A)$ on a $|\lambda| \leq \inf_{n \in N} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

III. Applications linéaires compactes

On note B la boule unité de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est dite compacte si pour toute partie bornée A de E, $\overline{f(A)}$ est une partie compacte de F. On note $L_K(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F.

On rapelle et on admettra qu'un R-espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

1) Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E,F)$; f est compacte si et seulement si $\overline{f(B)}$ est compacte.

2) Montrer que $L_K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$.

3) Montrer que si E est de dimension finie alors $L_K(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ et que si F est de dimension finie alors $L_K(E,F) = L(E,F)$.

4) Soient f et g dans $L(E,F)$, montrer que si f ou g est compacte alors $g \circ f$ est compacte.

5) Soient f dans $L(E,E)$ et μ un scalaire non nul; montrer que $Ker(f - \mu I)$ est fermé. Montrer que si en outre f est compacte, $Ker(f - \mu I)$ est de dimension finie.

6) Montrer que dans un espace vectoriel normé complet un sous-ensemble fermé est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.

7) Montrer que si F est complet alors $L_K(E,F)$ l'est aussi.

8) Dans cette question, E est le R espace vectoriel des suites réelles bornées normé par $\| \cdot \|$ définie de la façon suivante. Pour $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ on a $\|X\| = sup_{i \in N} |x_i|$. Soit $H = (h_0, \ldots, h_n, \ldots) \in E$, on définit alors $h \in \mathcal{L}(E,E)$ par $h(X) = (h_0 x_0, \ldots, h_n x_n, \ldots)$ pour tout X dans E. Montrer que $h \in L(E,E)$ et préciser $\|h\|$. Montrer que h est compacte si et seulement si $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$.

IV. Equations fonctionnelles

Dans cette partie X est une partie compacte d'un espace vectoriel normé et E est le R-espace vectoriel des fonctions continues de X dans R muni de la norme de la convergence uniforme. On note u la fonction constante égale à 1 sur X.

Soit T un élément de $\mathcal{L}(E,E)$ vérifiant les deux propriétés suivantes,

(i) $\forall x \in E,\ x \geq 0 \Rightarrow T(x) \geq 0$,

(ii) $\exists k \in R.\ \forall n > 0,\ T(u) + T^2(u) + T^3(u) + \ldots + T^n(u) \leq ku$.

1) Montrer que $T \in L(E,E)$.

2) Montrer que pour p et q entiers plus grands que 1 on a $T^{p+q}(u) \leq kT^p(u)$. Montrer que pour n entier supérieur ou égal à 2 on a $(n-1)T^n(u) \leq k^2 u$.

3) Montrer que $\|T^n\| = sup_{t \in X} T^n(u)(t)$; en déduire qu'il existe un réel A et un réel $\alpha \in [0,1[$ tels que pour tout entier n on a $\|T^n\| \leq A\alpha^n$.

4) Montrer que $I - T$ est bijective et que $(I-T)^{-1} \in L(E,E)$. Donner l'expression de la solution générale de l'inégalité $T(x) \leq x$ (x étant une inconnue dans E).

5) Si $X = [0,1]$ et $T(x)(t) = \int_0^t x(y)dy$, vérifier que les propriétés (i) et (ii) sont bien vérifiéees. Trouver x dans E tel que $(I-T)(x) = u$.

V. Opérateurs de rang fini

On dit que $f \in L(E,F)$ est de rang fini si l'image de E par f est de dimension finie.

1) Comme à la question $III,5)$, E est l'espace des fonctions continues de $X = [0,1]$ dans R muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $K : [0,1]^2 \to [0,1]$ une fonction continue. On pose $T(x)(t) = \int_0^1 K(s,t)x(s)ds$.

a) Montrer que $T \in L(E,E)$.

b) Montrer que si K est de la forme $K(s,t) = \sum_{(i,j)\in I} a_{i,j}s^i t^j$, où I est un sous ensemble fini de N^2 et où les $a_{i,j}$ sont des coefficients réels, alors T est de rang fini.

2) On se place à nouveau dans le cas général et on considère $f \in L(E,F)$. On suppose de plus, jusqu'à la fin du problème, que F est un espace espace vectoriel normé complet, muni d'un produit scalaire associé à la norme (espace de Hilbert). Montrer que si f est de rang fini alors f est compacte.

3) Soit f une application linéaire compacte. Soit B, la boule unité de E, montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n et une famille $(y_1, \ldots, y_n)$ d'éléments de F tels que

$$f(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon),$$

où $B(y_i,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre y_i et de rayon ε. On note M_ε le sous espace vectoriel de F engendré par $(y_1, \ldots, y_n)$ et P_ε le projecteur orthogonal de F sur M_ε.

4) Montrer que $\|f - P_\varepsilon \circ f\| \leq \varepsilon$.

5) En déduire que toute application linéaire compacte est limite d'applications linéaires continues de rang fini.